Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
2. Klausur

2. Mai 2024

Zone A Vormittag | **Zone B** Vormittag | **Zone C** Vormittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

2224 – 9716

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 6]

Die Funktionen f und g sind für $-1 \le x \le 0$ folgendermaßen definiert:

$$f(x) = 1 - x^2$$

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Die Graphen von f und g schneiden sich bei $x = a$ und $x = b$, mit $a < b$.

(a) Finden Sie die Werte von a und b. [3]

(b) Finden Sie den Flächeninhalt der von den Graphen von f und g eingeschlossenen Fläche. [3]

2. [Maximale Punktzahl: 5]

Betrachten Sie den folgenden zweidimensionalen Datensatz, bei dem $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

x	5	6	6	8	10
y	9	13	p	q	21

Die Regressionsgerade von y auf x hat die Gleichung $y = 2{,}1875x + 0{,}6875$.

Die Regressionsgerade verläuft durch den Durchschnittspunkt $(\overline{x}, \overline{y})$.

(a) Es sei $\overline{x} = 7$. Verifizieren Sie, dass dann $\overline{y} = 16$ gilt. [1]

(b) Es sei $q - p = 3$. Finden Sie dann die Werte von p und q. [4]

3. [Maximale Punktzahl: 6]

Für die Lautstärke eines Klangs L in Dezibel und seine Intensität I Einheiten, gilt der Zusammenhang $L = 10\log_{10}(I \times 10^{12})$.

Betrachten Sie zwei Klänge S_1 und S_2.

S_1 hat eine Intensität von 10^{-6} Einheiten und eine Lautstärke von 60 Dezibel.

Die Intensität von S_2 ist doppelt so hoch wie die von S_1.

(a) Geben Sie die Intensität von S_2 an. [1]

(b) Bestimmen Sie die Lautstärke von S_2. [2]

Die maximale Lautstärke von Donner bei einem Gewitter wurde mit 115 Dezibel gemessen.

(c) Finden Sie die entsprechende Intensität I des Donners. [3]

4. [Maximale Punktzahl: 6]

Ein Teilchen bewegt sich auf einer geraden Linie so, dass seine Geschwindigkeit $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ zur Zeit t Sekunden gegeben ist durch $v(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-\sin 2t}$ für $0 \le t \le 2$.

(a) Finden Sie die Geschwindigkeit des Teilchens bei $t = 2$. [1]

(b) Finden Sie die maximale Geschwindigkeit des Teilchens. [2]

(c) Finden Sie die Beschleunigung des Teilchens in dem Moment, in dem es seine Richtung ändert. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. [Maximale Punktzahl: 5]

Betrachten Sie eine Zufallsvariable X mit $X \sim \mathrm{B}(n\,,\,0{,}25)$.

Bestimmen Sie den kleinsten Wert von n so, dass $\mathrm{P}(X \geq 1) > 0{,}99$ ist.

6. [Maximale Punktzahl: 6]

Das Volumen einer kugelförmigen Blase wächst mit einer konstanten Änderungsrate von $5\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}$.

Das Anfangsvolumen der Blase kann als Null angenommen werden.

Finden Sie die Änderungsrate in $\mathrm{cm\,s}^{-1}$, mit welcher der Radius der Blase zunimmt, wenn das Volumen der Blase $20\,\mathrm{cm}^3$ beträgt.

7. [Maximale Punktzahl: 5]

Die Kurve $y = 4\ln(x-2)$ für $0 \le y \le 4$ wird um $360°$ um die y-Achse gedreht und bildet so einen Rotationskörper.

Finden Sie das Volumen dieses Körpers.

8. [Maximale Punktzahl: 10]

Es sei $z = 1 + \cos 2\theta + \mathrm{i} \sin 2\theta$, mit $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) Zeigen Sie, dass

(i) $\arg z = \theta$;

(ii) $|z| = 2\cos\theta$. [7]

(b) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode, den Wert von θ so, dass $\arg(z^2) = |z^3|$ gilt. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Maximale Punktzahl: 8]

Betrachten Sie die Kurve $y = \dfrac{x-4}{ax^2+bx+c}$, wobei a, b und c von Null verschiedene Konstanten sind.

Die Kurve hat einen lokalen Tiefpunkt bei $(2\,,\,1)$ und eine vertikale Asymptote mit der Gleichung $x = 1$.

Finden Sie die Werte von a, b und c.

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 15]

Ein Geschäft verkauft Pralinen. Das Gewicht, in Kilogramm, der von einem zufälligen Kunden gekauften Pralinen kann, durch eine stetige Zufallsvariable X modelliert werden. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion f ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{85}\left(4+3x-x^2\right), & 0{,}5 \le x \le 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Finden Sie den Modus von X. [2]

(b) Finden Sie $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)$. [2]

(c) Finden Sie den Median von X. [3]

Das Geschäft verkauft Pralinen für $25\,\$$ pro Kilogramm an die Kunden.

Wenn ein Kunde jedoch mindestens $0{,}75$ Kilogramm Pralinen kauft, verkauft das Geschäft diese zu einem ermäßigten Preis von $24\,\$$ pro Kilogramm.

(d) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Kunde mindestens $48\,\$$ ausgibt. [3]

(e) Finden Sie den zu erwartenden Betrag, der pro Kunde ausgegeben wird. Geben Sie Ihre Antwort auf den nächsten vollen Cent genau an. [5]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 17]

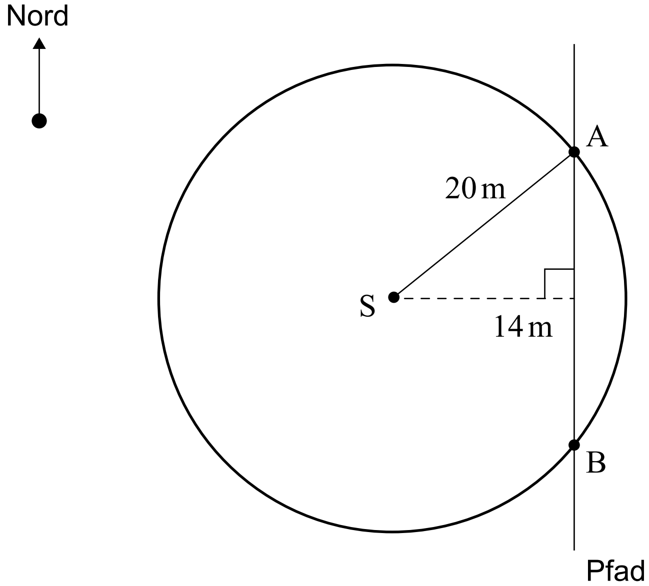
Ein rotierender Sprinkler befindet sich an einem festen Punkt S.

Er bewässert alle Punkte auf und innerhalb eines Kreises mit dem Radius 20 Meter.

Der Punkt S befindet sich 14 Meter vom Rand eines Weges entfernt, der in Nord-Süd-Richtung verläuft.

Der Pfad schneidet den Kreis an den Punkten A und B.

Dies wird im folgenden Diagramm dargestellt.



(a) Zeigen Sie, dass die auf vier signifikante Stellen genaue Länge $\mathrm{AB} = 28{,}57$ beträgt. [3]

Der Sprinkler dreht sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von einer Umdrehung alle 16 Sekunden.

(b) Zeigen Sie, dass sich der Sprinkler in einer Sekunde um einen Winkel von $\frac{\pi}{8}$ Radiant dreht. [1]

T sei die Zeitdauer in Sekunden, während der $[\mathrm{AB}]$ bei jeder Umdrehung bewässert wird.

(c) Finden Sie den Wert von T. [4]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 11)

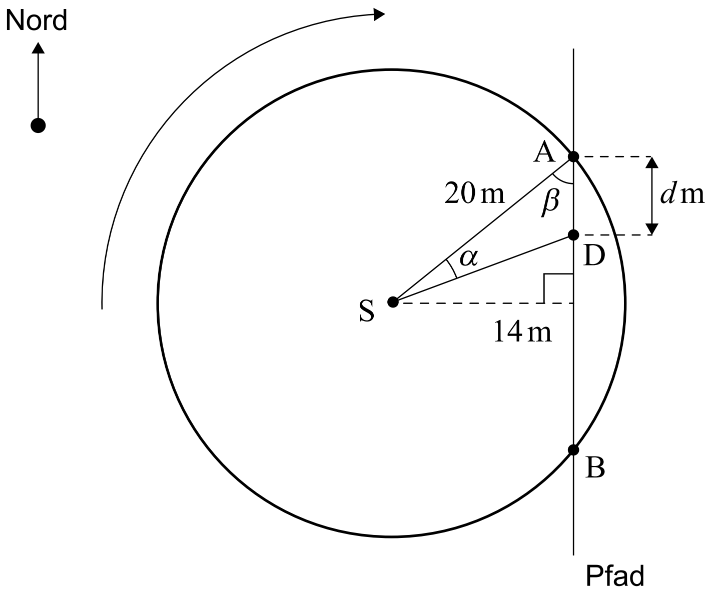
Betrachten Sie eine Umdrehung des Sprinklers im Uhrzeigersinn.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ spritzt das Wasser bei A an den Rand des Pfads.

Zum Zeitpunkt t Sekunden spritzt das Wasser auf einen variablen Punkt D auf dem Rand des Pfads, der d Meter südlich von Punkt A liegt.

Es seien $\alpha = \mathrm{A\hat{S}D}$ und $\beta = \mathrm{S\hat{A}B}$, wobei die Winkel α, β im Bogenmaß gemessen werden.

Dies wird im folgenden Diagramm dargestellt.



(d) Notieren Sie einen Ausdruck für α in Abhängigkeit von t. [1]

Es gelte nun $\beta = 0{,}7754$, im Bogenmaß und auf vier signifikante Stellen genau.

(e) Zeigen Sie mit Hilfe des Sinussatzes in $\Delta\mathrm{ASD}$, dass der Abstand d zum Zeitpunkt t durch

$$d(t) = \frac{20\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)}{\sin\left(2{,}37 - \frac{\pi t}{8}\right)}$$ modelliert werden kann. [3]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 11)

Eine Schildkröte läuft am Rande des Pfads nach Süden.

Zum Zeitpunkt t Sekunden kann der Abstand g der Schildkröte (in Meter) südlich von A, durch die folgende Funktion modelliert werden:

$$g(t) = 0{,}05t^2 + 1{,}1t + 18 \text{, mit } t \geq 0 .$$

(f) Geben Sie an, wie weit südlich die Schildkröte zum Zeitpunkt $t = 0$ von A entfernt ist. [1]

Es sei w die Entfernung zwischen der Schildkröte und dem Punkt D zum Zeitpunkt t Sekunden.

(g) (i) Notieren Sie mit Hilfe der Ausdrücke für $g(t)$ und $d(t)$ einen Ausdruck für w in Abhängigkeit von t.

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit wann und wo auf dem Weg das Wasser die Schildkröte zuerst erreicht. [4]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 21]

Betrachten Sie die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\operatorname{cosec} 2x = \sqrt{\tan x}$, mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $y = \frac{\pi}{4}$ bei $x = \frac{\pi}{4}$.

(a) Finden Sie mit Hilfe des Euler-Verfahrens mit der Schrittlänge $\frac{\pi}{12}$ einen Näherungswert für y bei $x = \frac{5\pi}{12}$.

Geben Sie Ihre Antwort auf drei signifikante Stellen genau an. [3]

(b) Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\ln(\cot x)\right) = -\operatorname{cosec} 2x$. [4]

(c) Zeigen Sie, dass $\sqrt{\cot x}$ ein Integrationsfaktor für diese Differentialgleichung ist. [4]

(d) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit und durch Lösen der Differentialgleichung, dass $y = x\sqrt{\tan x}$. [5]

(e) Betrachten Sie die Kurve $y = x\sqrt{\tan x}$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und die in Teil (a) berechnete Näherung nach dem Euler-Verfahren.

(i) Finden Sie den y-Wert für $x = \frac{5\pi}{12}$. Geben Sie Ihre Antwort auf drei signifikante Stellen genau an.

(ii) Nennen Sie unter Berücksichtigung der Kurvensteigung einen Grund, warum das Euler-Verfahren keine gute Näherung für den y-Wert bei $x = \frac{5\pi}{12}$ liefert.

(iii) Geben Sie an, warum dieser Näherungswert kleiner ist als der y-Wert bei $x = \frac{5\pi}{12}$. [3]

(f) Deduzieren Sie unter Berücksichtigung von $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\operatorname{cosec} 2x = \sqrt{\tan x}$, dass die Kurve $y = x\sqrt{\tan x}$ eine positive Steigung für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ aufweist. [2]

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.